▶ **Πρόταση**: Το I είναι ιδεώδες του R, αν:

(i) $0 \in I$

(ii) Αν $\alpha, b \in I \Longrightarrow \alpha - b \in I$

(iii) Αν $\alpha \in I$, $r \in R \Longrightarrow \boxed{\alpha \cdot r \in I}$ & $\boxed{r \cdot \alpha \in I}$.

▶ Ισχύει ότι:

$$(\alpha + I)(b + I) = (\alpha \cdot b) + I$$

Είναι καλά ορισμένη;

▶ Έστω
$$\begin{cases} \alpha' + I = \alpha + I \Leftrightarrow \alpha' + 0 \in \alpha' + I = \alpha + I \Longrightarrow \boxed{\alpha' = \alpha + i_1} \\ b' + I = b + I \Leftrightarrow \boxed{b' = b + i_2} \end{cases}$$

• Συνεπώς: $(\alpha' + I)(b' + I) = (\alpha' \cdot b') + I = (\alpha + i_1)(b + i_2) + I =$

$$= (\alpha b + \underbrace{i_1 b}_{\in I} + \underbrace{\alpha i_2}_{\in I} + \underbrace{i_1 \cdot i_2}_{\in I}) + I = \alpha b + \underbrace{i_3 + I}_{= I} = \boxed{\alpha b + I}$$

• Άρα ο πολλ/μός "·" είναι καλά ορισμένος!!!

▶ R/I ομάδα ως προς την πρόσθεση

▶ $(a+I)\big((b+I)\cdot(c+I)\big) = (a+I)\big((b\cdot c)+I\big) = (a\cdot b\cdot c)+I$

$= \big((a\cdot b)+I\big)\cdot(c+I) = \big((a+I)(b+I)\big)(c+I)$

· Ισχύει η προσεταιριστική!!!

▶ $(a+I)\big((b+I)+(c+I)\big) = (a+I)\big((b+c)+I\big) = a\cdot(b+c)+I =$

$= (a\cdot b+a\cdot c)+I = \big((a\cdot b)+I\big)+\big((a\cdot c)+I\big)$

· Όμοια $\big((a+I)+(b+I)\big)\cdot(c+I) = (a\cdot c+I)+\big((b\cdot c)+I\big)$

· Ισχύει η επιμεριστική!!!

• Συνεπώς: R/I είναι δακτύλιος!!!

$\boxed{\text{▶ Πρόταση}}$ · Έστω I ιδεώδες του δακτυλίου R

· Η απεικόνιση $\chi: R \to R/I$, με τύπο:

$$\boxed{\chi(a) = a+I}$$

είναι επιμορφισμός δακτυλίων με $\boxed{\ker\chi = I}$

▸ Απόδειξη: $\gamma(a\cdot b) = (a\cdot b)+I = (a+I)\cdot(b+I) = \gamma(a)\cdot\gamma(b)$

Για $\boxed{\gamma(a+b)=\gamma(a)+\gamma(b)}$ & $\boxed{\ker\gamma = I}$ τα έχουμε

δείξει $\longrightarrow$ γ: ομομορφισμός με $\ker\gamma = I$

▸ Θεμελιώδες Θεώρημα ομομορφισμών δακτυλίων

Έστω $\varphi: R \longrightarrow R'$ ομομορφισμός δακτυλίων. Τότε:

$$\boxed{R/\ker\varphi \simeq \varphi(R) = \mathrm{Im}\,\varphi}$$

▸ Απόδειξη: Θεωρώ την απεικόνιση:

$$\boxed{f(a+\ker\varphi) = \varphi(a)}$$

Θα αποδείξουμε ότι: (i) f: καλά ορισμένη

(ii) f ομομορφισμός δακτυλίων

(iii) f: 1-1 , (iv) f: επί

(ii) • Για: $f((a+\ker\varphi)(b+\ker\varphi)) = f(ab+\ker\varphi) = \varphi(a\cdot b)$

φ: ομομορφισμός $= \varphi(a)\cdot\varphi(b) = f(a+\ker\varphi)\cdot f(b+\ker\varphi)$

Και: $f((a+\ker\varphi)+(b+\ker\varphi)) = f((a+b)+\ker\varphi) = \varphi(a+b)$

φ: ομομορφισμός $\varphi(a)+\varphi(b) = f(a+\ker\varphi)+f(b+\ker\varphi)$

• Άρα: f: ομομορφισμός δακτυλίων!!!

▶ Παραδείγματα | R: αντιμεταθετικός δακτύλιος $(a\cdot b = b\cdot a)$ $(a+b=b+a)$

• $a\in R \Longrightarrow \langle a\rangle = \{r\cdot a \mid r\in R\} = R_a$

• $\langle a\rangle$: ιδεώδες; (i) $0 = 0\cdot a \in \langle a\rangle$

(ii) Έστω $x,y\in\langle a\rangle \Longrightarrow x = r_1\cdot a$, $y = r_2\cdot a \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x-y = r_1\cdot a - r_2\cdot a = a(r_1-r_2)\in\langle a\rangle$

(iii) Έστω $r\in R$, $x\in\langle a\rangle \Longrightarrow x = r_1\cdot a \Longrightarrow$

$\Longrightarrow r\cdot x = (r\cdot r_1)\cdot a \in \langle a\rangle$

Άρα $\langle a\rangle$: ιδεώδες του R

▶ Παραδείγματα | R μεταθετικός με μοναδιαίο στοιχείο.

$\boxed{\langle 0\rangle = \{0\}}$

$\langle 1\rangle = \{r\cdot 1 \mid r\in R\} = \{r \mid r\in R\} = R$

$I = \langle a,b\rangle = \{r_1\cdot a + r_2\cdot b \mid r_1,r_2\in R\}$: ιδεώδες

▶ **Ορισμός** Ένα ιδεώδες $P \neq R$ σε έναν μεταθετικό δακτύλιο R, λέγεται πρώτο ιδεώδες, αν:

$$\boxed{ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ ή } b \in P}$$

▶ **Θεώρημα** Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. $(0_R \neq 1_R)$, και $P \neq R$, ένα ιδεώδες του R. Τότε το R/P είναι ακέραια περιοχή, αν και μόνο αν P: πρώτο ιδεώδες

▶ **Απόδειξη**: $(\Longrightarrow)$ R/P: ακέραια περιοχή

• Έστω $\boxed{a \cdot b \in P}$, τότε: $\underset{\in R/P}{(a+P)} \cdot \underset{\in R/P}{(b+P)} = \underset{\in P}{ab} + P = P$

• Όμως R/P ακέραια περιοχή $\Rightarrow \begin{cases} a+P = 0+P \\ \text{ή} \\ b+P = 0+P \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-0 = a \in P \\ \text{ή} \\ b-0 = b \in P \end{cases} \Rightarrow \boxed{P: \text{πρώτο ιδεώδες}}$$

$(\Longleftarrow)$ P: πρώτο ιδεώδες. Θδο R/P αντιμεταθετικός.

$(a+P)(b+P) = a \cdot b + P \overset{R: \text{ΑΝΤΙΜ}}{=} b \cdot a + P = (b+P)(a+P)$

$$\Longrightarrow \boxed{R/P: \text{αντιμεταθετικός}}$$

• Ο.δ.ο R/P είναι μοναδιαίος.

Έχω: $(\alpha+P)(1+P) = \alpha+P = (1+P)(\alpha+P)$

$\Rightarrow$ Άρα R/P μοναδιαίος, με

μονάδα: $1+P$.

• Ο.δ.ο ο δακτύλιος R/P ΔΕΝ έχει διαιρέτες του 0.

$\rightarrow$ Έστω $(\alpha+P)\cdot(b+P) = 0+P \rightarrow \alpha\cdot b+P = 0+P$

$\Rightarrow \alpha\cdot b \in P \xRightarrow{P \text{ πρώτο}} \alpha \in P$ ή $b \in P \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\alpha+P = P = 0+P}$ ή $\boxed{b+P = P = 0+P}$

$\Rightarrow$ Άρα R/P ΔΕΝ έχει διαιρέτες του μηδενός

$\Rightarrow$ $\boxed{R/P: \text{Ακέραια περιοχή}}$

▶ **Ορισμός**: Ένα ιδεώδες M του R καλείται μεγιστοτικό, αν $\boxed{M \neq R}$ και αν $\boxed{M \subseteq I \subseteq R}$ για κάποιο ιδεώδες I, τότε: $\boxed{M = I}$ ή $\boxed{I = R}$

▶ Παράδειγμα Το $\langle 2\rangle = 2\mathbb{Z}$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$. $\Rightarrow \boxed{\langle 2\rangle \subsetneq I \subseteq \mathbb{Z}}$

Έχουμε ότι $\begin{cases} 2k+1 \in I, & \text{αφού } \langle 2\rangle \subsetneq I \\ -2k \in I, & \text{αφού } \langle 2\rangle \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2k+1)+(-2k) \in I \Rightarrow \boxed{1 \in I} \Rightarrow \boxed{I = \mathbb{Z}}$

▶ Θεώρημα Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Το M είναι μεγιστοτικό αν και μόνο αν $\boxed{R/M : \text{σώμα}}$

△ Κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή

△ Κάθε μεγιστοτικό ιδεώδες είναι πρώτο ιδεώδες

↳ Έστω M: μεγιστοτικό $\Rightarrow R/M$: σώμα $\Rightarrow R/M$: ακέραια περιοχή $\Rightarrow M$: πρώτο ιδεώδες

▶ Παραδείγματα

- $\langle 2\rangle = 2\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$: σώμα $\Rightarrow 2\mathbb{Z}$ μεγιστοτικό
- $\langle 4\rangle = 4\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$: έχει διαιρέτες του μηδενός $\Rightarrow 4\mathbb{Z}$ όχι μεγιστοτικό-πρώτο
- $\langle p\rangle = p\mathbb{Z}$, με p: πρώτο, είναι μεγιστοτικό (και πρώτο)
- Το $\langle 0\rangle$ είναι πρώτο ιδεώδες, αλλά όχι μεγιστοτικό!!